Lycée Laymoun 2ème BAC . Pro

Fonctions exponentielles .

M.YAZOUGH

① fonction exponentielle népérienne :

Déf : • la fonction exponentielle népérienne, notée e^x (ou $\exp(x)$) est la fonction réciproque de la fonction : $x \longmapsto \ln(x)$

• $x \mapsto e^x$ est défini et continue sur $\mathbb{R}$

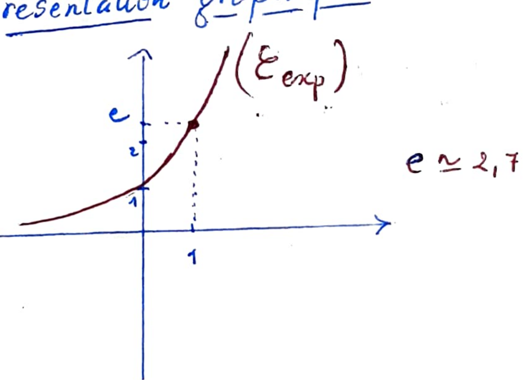
② Propriétés élémentaires :

• $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $(\forall x \in \mathbb{R}),\ e^x > 0$

•• $\forall x \in \mathbb{R}$ $\ln(e^x) = x$

••• $\forall x > 0$ $e^{\ln(x)} = x$

③ Représentation graphique :



$e \simeq 2,7$

④ Propriétés et déductions :

$\forall x; y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x e^y$

$(\forall x; y \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})$ on a :

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

$e^{rx} = (e^x)^r$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

EX:1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les éq :

1°) $e^{2x-1} = e^{x+1}$

2°) $e^{x-1} = 3$

3°) $e^{x^2+x-2} = 1$

4°) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

5°) $e^{3x+1} = -2$

⑤ Domaine de définition :

si $f(x) = e^{u(x)}$ on a :

$D_f = D_u = \{x \in \mathbb{R} ; u(x) \in \mathbb{R}\}$

EX : 2 Donner le domaine de définition des fcts :

1°/ $f(x) = e^{\sqrt{x-2}}$

2°/ $g(x) = e^{\sqrt{\frac{1}{x} - 3}}$

3°/ $h(x) = e^{x \ln(x^2-9)}$

⑥ Dérivabilités :

◦ $\forall x \in \mathbb{R}$ $(e^x)' = e^x$

◦ si u est dérivable sur I alors $(\forall x \in I)$ $(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$

EX : 3 Calculer la dériv de f ds chaque cas :

1°/ $f(x) = e^{x^3 - 2x + 1}$

2°/ $f(x) = e^{x \sin(x)}$

3°/ $f(x) = e^{\sqrt{x+4}}$

(7) Limites essentielles :

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$$

$$(\forall n \geq 1) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{n}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x e^{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^{n} e^{x} = 0$$

EX : 4 Calculer les limites :

1°/ $\lim_{x\to+\infty} (e^{x} - x)$

2°/ $\lim_{x\to+\infty} (xe^{-x} - x)$

3°/ $\lim_{x\to+\infty} (e^{2x} - e^{x} + 1)$

4°/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x} - e^{2}}{x-2}$

5°/ $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-1}{xe^{-x}}$

6°/ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$

(8) Fonction exponentielle de base a . $a \in \mathbb{R}_{+}^{*} - \{1\}$.

Déf : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$a^{x} = e^{x \ln(a)}$$

et $\log_a(a^{x}) = x$

propriétés :

$\forall x \in]0;+\infty[\; ; \quad a^{\log_a(x)} = x$

$a^{x} = a^{y} \Leftrightarrow x = y$

$\forall x \in \mathbb{R} \; \forall y > 0 \quad a^{x} = y \Leftrightarrow \log_a(y) = x$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q}$:

$a^{x} \times a^{y} = a^{x+y}$

$(a^{x})^{r} = a^{rx} \; ; \quad \frac{1}{a^{x}} = a^{-x}$

$\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$

$$\forall x > 0 : \; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

EX : 5 $g(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(e^{x} - 1)$

1°/ Déterminer D_g.

2°/ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $g(x) = 0$

3°/ calculer : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

EX : 6 (EXAM . BAC . 2018)

$f(x) = (e^{x} - 1)^{2}$.

1) calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et donner un interprétation du résultat.

2) calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donner une interprétation du résultat.

→ on peut utiliser :

$$(e^{x}-1)^{2} = e^{x}(e^{x}-2) + 1$$

3) Mq : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; f'(x) = 2(e^{x}-1)e^{x}$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

5) Déterminer l'abscisse du pt d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite : $(\Delta) : y = 1$.

$\ln(2) \simeq 0,7$

EX : 7 $g(x) = (x-1)e^{x} + x + 1$

pour tout $x \in [0,+\infty[$

1) calculer $g'(x)$ et mq g est str ↗ sur $[0,+\infty[$

2) Mq : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

3) soit : $f(x) = \frac{xe^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$; $x \in \mathbb{R}^{*}$

3-a) Mq f est une fct impaire.

3-b) Calculer $\lim_{x\to 0^{+}} f(x)$ et interpréter le résultat.

3-c) Mq : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et interpréter ...

4) Mq : $(\forall x > 0) \quad f'(x) = \frac{e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}} g(x)$.